

Diagnostik-Material

Mengenbegriffserwerb

Angesprochene Lernbereiche:

Mengenbildung, Mengenvergleich, Invarianz und Repräsentanz, Klassifikation, Seriation

Zu diesem Ordner gehört ein Kasten mit mindestens den folgenden Materialien:

Plastiktiere, Nuggets, transparente Plättchen, Steckwürfel, logische Blöcke, Walnüsse, Haselnüsse, Zahlenwürfel 1-10, Zahlenwürfel 1-6, Augenzwürfel, Farbwürfel, Zahlenkarten 1-14 (2x), runde Mengenkarten 1-6, strukturierte Mengenkarten 1-10, Karten mit Relations- und Operationszeichen

Bevor es los geht:

- Sitzen Sie nicht gegenüber, sondern über Eck nebeneinander, Sie auf der Seite der bevorzugten Hand des Kindes. So arbeiten Sie *gemeinsam am Material*.
- Eine *Modellhandlung* (auch mit begleitendem Sprechen) ist eine oft sehr geeignete und einfache Form der Aufgabenstellung.
- Sie und das Kind sollen Gegenstände benennen und die jeweiligen Überlegungen, Kriterien und Vorgehensweisen zur *Sprache* bringen.
- *Variieren* Sie Material, Kriterien und Aufgabenstellung aus der Situation heraus hinsichtlich der Komplexität und des Abstraktionsniveaus.
- *Rollenwechsel*: Lassen Sie das Kind Aufgaben für Sie stellen

Viel Spaß mit dem Material!

Andreas Schaefer, im Februar 2003

Kleiner Tipp: Kopieren und lochen(!) Sie die Arbeitsblätter, dann können Sie Original und Kopien bis zur Verwendung wieder in die Klarsichthülle stecken, ohne sie später zu verwechseln.

Einzelne Arbeitsblätter und Kopiervorlage stammen aus den folgenden, sehr empfehlenswerten Materialsammlungen:

Kretschmann, Rudolf; Behring, Karin; Dobrindt, Yvonne: Prozessdiagnose mathematischer Kompetenzen in den Schuljahren 1 und 2. Band II: Grundlegende Fertigkeiten des 1. Schuljahres. Nornburg/Niederelbe: Persen 1999

Heuer, Gerd Ulrich: Beurteilen, Beraten, Fördern. Materialien zur Diagnose, Therapie und Bericht/Gutachtenerstellung bei Lern-, Sprach- und Verhaltensauffälligkeiten in Vor-, Grund- und Sonderschule. Kopiervorlagen. Verlag modernes lernen 1997

Pool, Truus: plus und minus. Ernst Klett Verlag 1995.



(1) Von der Ursuppe zur Menge

(Elemente und ihre Eigenschaften)

Mathematik beginnt dort, wo Kinder ihre Umwelt sortieren, untergliedern, handhabbar machen und zur Sprache bringen. Aus einem ungegliederten Wahrnehmungsrauschen wird die Welt zu etwas (verschieden) Einteilbarem – zu Mengen:

- Ich bin ich
- Kind <-> Mutter
- Ich und meine Umwelt

- Es gibt Eltern und Kinder
- Spielzeug kommt in die Kiste
- Ich sortiere rote, gelbe, große, kleine Legosteine
- Man unterscheidet Haustier und Zootiere

Es gibt kein richtiges oder falsches Durchgliedern – wohl aber Unterschiede hinsichtlich der Komplexität, des Abstraktionsgrades und der Flexibilität der Durchgliederungen.

Schau mal, ich sortiere. Menschen – hier, Tiere – hier.



Ich auch. Das sind Tiere zum Essen. Und die nicht.

Findest du raus wie ich jetzt sortiere?

Klar (...)



Jetzt mach ich mal eine Aufgabe für dich

Ich hab's raus! (...) Jetzt wieder du:
Finde mal Zweibeiner, die keine Menschen sind.

Differenzierungen:

<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher gering</i>	<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher hoch</i>
Äußere Unterscheidungen (Farbe, Größe)	semantische Unterscheidungen (Funktionen, Oberbegriffe)
Ein Merkmal berücksichtigen	Merkmale kombinieren (Tier & Zweibeiner)
Lebensnahe Realgegenstände verwenden	Abbildungen und geometrische Formen verwenden

Material: Spielzeugfiguren, logische Blöcke, 2 verschiedene AB als Erzähl- und Malanlass (zum kategorisierten Ausmalen, „Einzäunen“), Farbwürfel (Würfeln und Gegenstände der passenden Farbe finden)



(2) Von der Menge zum Vergleich

(Mengenrelationen)

Mengen können nicht nur gebildet, sondern auch hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verglichen werden. Dabei kommt es (noch lange) nicht auf das Zählen an, sondern auf das Erkennen einer Unterschiedlichkeit – oder der Gleichheit.

Wichtig ist, dass beim Vergleich die *Elemente* mit benannt werden:

- Ich habe **mehr Bälle** als du
- In der Klasse gibt es **weniger Mädchen** als Jungen
- Wir haben **gleich viele Stifte**

Auf dieser Stufe geht es nicht um das Abzählen, da diese Strategie je nach Entwicklungsstand für das Kind hilfreich oder auch irreführend sein kann (kardinaler/ordinaler Zahlaspekt). Wenn das Kind abzählt, ist das in Ordnung (nicht „falsch“!), aber die nächste Aufgabe soll es ohne Zählen lösen.

Obwohl sie erst später im Lernaufbau folgen, können hier schon die Relationszeichen aufgegriffen (evtl. auch über das Krokodil erarbeitet) werden: „Dafür gibt es Zeichen – hast du sie schon einmal gesehen?“ Die Kenntnis der Relationszeichen ist aber an dieser Stelle des Lernaufbaus nicht erforderlich.

Findest du heraus wo mehr Steine liegen?



Prima, du hast recht. Man sagt dazu ‚gleichviel‘.
Noch eine Aufgabe ... ?

Auf meinem Teller liegen Nuggets. Leg auf deinen so viele, dass es mehr Nuggets sind.

Oh. Schwierig. Hier sind mehr. Und da auch. Beide.

Achja.

Mhm, ist leicht.

**leg* ... so.*



Prima. Schau, ein Bild. In welchem Haus wohnen weniger Leute?

Hier. Weil da nur weniger rein passen.

Differenzierungen:

<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher gering</i>	<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher hoch</i>
Sehr deutliche Unterschiede (z.B. Bildkarten)	Geringere Differenzen
Gegliederte Mengen	Ungeordnete Mengen
Realgegenstände verwenden	Abbildungen (und Abbildungen mit nicht direkt sichtbaren Elementen) verwenden

Material: Vorlage mit Mengenkreisen, Nuggets, Bildkarten mit groben Vergleichen, AB zum Schätzen von zu erschließenden Mengen, erweiternd: Karten mit Relationszeichen, AB mit Zeichen „gleich“ „nicht gleich“.



(3) Das Verhältnis bleibt – unabhängig von Anordnung und Größe der Elemente

(Zuordnung, Invarianz und Repräsentanz)

Auf einer frühen Entwicklungsstufe ist die Mächtigkeit einer Menge in der Wahrnehmung der Kinder nicht konstant, sondern sie variiert, sobald die Elemente anders angeordnet werden. (Das Umordnen geschieht dabei vor den Augen des Kindes!) Dieses Entwicklungsstadium muss von dem der *Invarianz* abgelöst werden: Mengen bleiben gleichmächtig, egal wie sie angeordnet werden. In ähnlicher Weise muss auch das Konzept der *Repräsentanz* erworben werden: Die Anzahl der Elemente einer Menge ist unabhängig von der Größe der Elemente.

Die Beurteilung der Mengenrelation erfolgt durch die *Zuordnung* – jedes Element einer Menge gehört zu einem Element der anderen Menge. Zeichnerisch kann die Zuordnung durch Linienverbindungen hergestellt werden.

Die Einschätzung der Mengenrelation soll auch hier nicht durch Zählen erfolgen. Wenn das Kind abzählt, ist das in Ordnung (nicht „falsch“!), aber die nächste Aufgabe soll es OHNE Zählen lösen.

Aufgabenstellungen:

Ich lege einen Stein auf meine Seite – du legst einen auf deine Seite. So, schau...



Mach ich. He da ist eine Lücke... das muss so...

Oha du hast recht. Immer gegenüber. So, fertig. Wer hat mehr Steine?

Achja.

Beide gleich viele.

Schau was ich mache [Reihe stauchen/strecken oder flächig umordnen] Wer hat jetzt mehr Steine?

Ich.



Warum?
Habe ich einen Stein weg genommen?
[Zurück ordnen]

*Weil da sind es wenige und hier mehr.
Nein. Bei dir sind jetzt weniger.
Jetzt sind es wieder gleichviele.*

Differenzierungen:

Komplexität / Abstraktionsniveau eher gering	Komplexität / Abstraktionsniveau eher hoch
Linie mit „Boxen“ oder „Stielen“ (nur bei Zuordnung/Invarianzüberprüfung)	Einfache Linie (bei Zuordnung/Invarianzüberprüfung)
Veränderungen nachvollziehbar (Umordnen von Elementen, konkrete Zuordnung - bei Repräsentanz: Aufblasen von Luftballons)	Veränderungen nur in der Vorstellung rekonstruierbar, vorstellende/zeichnerische Zuordnung (bei Repräsentanz: in der Größe nicht veränderliche Elemente)

Material: Linienblatt, Nuggets (oder Smarties), ggf. Folienstift zur Einzeichnung von Hilfen für die Zuordnung, Walnüsse und Haselnüsse (alternativ auch Luftballons), AB zur zeichnerischen Zuordnung (Invarianz und Repräsentanz), AB mit verschiedenen großen Ziffern.



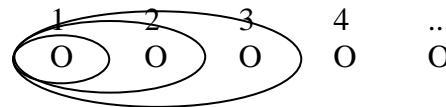
(4) Mengen gleicher Mächtigkeit werden gleich bezeichnet

(Klassifikation)

Erst wenn Kinder Mengen bilden (1) und vergleichen (2) können und die Mächtigkeit der Menge in der Wahrnehmung der Kinder unabhängig von der Anordnung oder Ausdehnung der Elemente konstant bleibt (3), können diese Mengen sinnvoll mit Ziffern/Zahlworten bezeichnet werden.

Dabei handelt es sich um den sog. kardinalen Zahlaspekt (Mächtigkeit von Mengen), im Gegensatz zu dem ordinalen Zahlaspekt (Reihenfolge von Elementen: erster, zweiter usw.)

Um das (kardinale) Zählen vom (ordinalen) Abzählen zu unterscheiden, sollten Elemente in eine Umgrenzung hinein gezählt werden (in ein Gefäß, in einen Kreis) oder beim Zählen mit dem Finger entsprechend umfahren werden:



Aufgabenstellungen:

Hier sind Karten mit Bildern und Karten mit Punkten. Du findest bestimmt heraus welche zusammen gehören



Prima, das stimmt. Du hast sogar schon eine passende Zahl gefunden...

Genau. Mach mit den anderen Karten das Gleiche.

Diese und diese – weil es beide vier sind

Ja, die Karte mit der 4 passt dazu



Zwei Hühner, zwei Punkte, da passt die „2“...

Mit den Würfeln können wir das auch probieren...

Differenzierungen:

<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher gering</i>	<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher hoch</i>
Zuerst nur ein Mengenbild zeigen, dazu aus ein paar Punktmenen die Passende wählen lassen, im nächsten Schritt einige Ziffern anbieten	Mengenbilder, Punktmenen und Ziffernkarten gleichzeitig und ungeordnet und komplex darbieten und ordnen lassen
Konkrete Gegenstände oder Mengenbilder verwenden und passende Karten zuordnen / Mengen nach Zahlkartenvorlage bilden	Arbeitsblatt verwenden und gleichmächtige Mengen durch Einkreisen herstellen und beschriften lassen.

Material: AB mit Mengenbildern, Punktmenen und Ziffern als Puzzle, AB zum zeichnerischen Herstellen von Mengen, Würfel mit Punkten / Zahlen, Vorlage mit Mengenkreisen von (2), Zahlenkarten



(5) Mengen und Zahlen der Reihe nach sortieren

(Seriation)

Die Seriation ist die Erweiterung und Verfeinerung des Mengenvergleiches. Die Mengen unterscheiden sich jeweils um ein Element von der vorhergehenden und der nachfolgenden Menge (Ausnahme: Reihen mit größeren Abständen), außerdem sind mehr als zwei Mengen beteiligt.

Der Zahlbegriff wird hier um den „Beziehungsaspekt“ erweitert: Zahlen drücken nicht nur eine Reihenfolge (ordinaler Aspekt) oder eine Mächtigkeit (kardinaler Aspekt) aus, sondern beschreiben auch Beziehungen zwischen Mengen und Zahlen: „Immer einer mehr/einer weniger“, später auch: „doppelt so viele“, „fünf weniger als...“

Bei der (einfachsten) Seriation von Steckwürfelsegmenten macht es einen großen Unterschied, ob die einzelnen Segmente als kleine Türme auf dem Tisch stehen, oder ob sie hingelegt werden. Im letzteren Fall müssen beide Enden der Türmchen beachtet werden.

Nach erfolgreicher Klassifikation (4) ist die Seriation auch mit der Zahlenreihe sinnvoll vorzunehmen.

Aufgabenstellungen:

Aus den Steckwürfeln baue ich einen Turm [zeigt]... bau mal einen, der einen Würfel höher ist..

Geht leicht!



Ich stell sie mal neben einander

Oha, einer kann ja wieder weg.

Prima. Daraus kann eine Treppe werden...

Ja... [baut] Diese Karten hier kann ich auch sortieren [sortiert], Auch mit den Zahlen!



Sagenhaft. Ich zähl mal rückwärts... „Zehn neun acht sieben fünf“

Nein! Die Sechs fehlt, lass mich mal: Zehn Neun Acht Sechs....

Differenzierungen:

<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher gering</i>	<i>Komplexität / Abstraktionsniveau eher hoch</i>
Strukturierte Mengenbilder	„unordentliche“ Mengenbilder
Nachbarn bilden oder Lücken auffüllen	Ganze Reihen erstellen, „rückwärts“ sortieren
Legen von Ziffernkarten (bei Zahlreihen)	Aufschreiben oder memorieren (bei Zahlreihen)

Material: Steckwürfel, runde Mengenkarten ungeordnet 1-6, strukturierte Mengenkarten 1-10 (ggf. nur Teile), AB zum Ergänzen mit Puzzleteilen, Zahlenkarten bis 14 (ggf. in Teilen), hier auch: rein vorstellendes/verbales „Zahlenmaterial“



(6) Situationen verstehen

(Situationsverständnis, mathematische Alltagserfahrung)



Bevor Kinder additive Operationen auf den verschiedenen Ebenen der Erkenntnistätigkeit durchführen können, müssen sie reale Situationen (von denen die späteren mathematischen Abstraktionen ausgehen) erfassen und beschreiben können. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

Situationsbilder stellen eine Momentaufnahme eines Handlungsablaufes dar. Aus dieser Momentaufnahme kann auf vorherige und nachfolgende Geschehnisse geschlossen werden.

Handlungsabläufe bestehen aus mehreren Bildern, die in eine logische Reihenfolge gebracht werden müssen (dabei kann es mehrere „richtige“ Lösungen geben).

Bei der Durchführung ist es wichtig, das Bild durch das Kind beschreiben zu lassen. Der dabei entstehende Dialog hilft, Unklarheiten zu beseitigen und Denkprozesse sichtbar werden zu lassen. Die Übersetzung in „Aufgaben“ ist an dieser Stelle möglich, aber nicht unbedingt erforderlich.

Aufgabenstellungen:

Schau mal, ein Bild. Erzähl mal...	Äh...
	Du kannst ja mal sagen, was du erkennst.
	<i>Ein Junge. Fische. So ein Glas mit äh... wie heisst noch?</i>
	Genau, es ist aus Glas, es ist Wasser drin. Ein Aquarium.
	<i>Die Junge stellt neue Fische in die... wie heisst noch mal?</i>
	
Es sind 5 Fische drin...	Vier dazu... jetzt sind es neun Fische.
Sag mal eine Aufgabe, die dazu passt.	$5+4=9$

Differenzierungen:

<i>Auf allen Komplexitätsniveaus</i>
Situationen mit Spielfiguren o.ä. nachstellen
Handlungsabläufe Schritt für Schritt erarbeiten

Material: Situationsbilder, mehrschrittige Handlungsfolgen auf Bildkarten

